Problèmes de la 3$^{\text{ème}}$ édition des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s

VERSION 1.0 MISE À JOUR LE 4 NOVEMBRE 2020

Préambule

Ces problèmes sont proposés dans le cadre des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s, organisées par l'association Animath. Ils sont proposés par des chercheur·e·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Chaque équipe choisit de traiter un des trois problèmes. On se reportera au site internet pour plus de détails.

Table des matières

Préambule 1
1. Pavé qui roule, n'amasse pas mousse 2
2. La botte de n lieues 3
3. Miroir, mon beau miroir 5

* * *

1. Pavé qui roule, n'amasse pas mousse

Après avoir travaillé à la mine toute la journée, les nains doivent transporter les blocs de pierre qu'ils ont extrait, sous la supervision de Prof.

Les blocs extraits par les nains sont des cubes de côté 1 très lourds, ce sorte que les nains ne peuvent pas les porter ou les faire glisser. Le seul moyen qu'ils ont de les déplacer est de les faire basculer autour d'une arête.

Pour une raison qu'aucun autre nain ne parvient à comprendre, Prof insiste pour que les blocs soient bien orientés : lorsque les blocs sortent de la mine, il grave sur la face du dessus un flèche indiquant le nord, et il n'accepte une position finale pour le bloc que si la flèche est revenue sur la face du dessus et pointe encore vers le nord.

Excepté dans la question 3, on supposera que les nains ont fait une sieste et n'ont eu le temps de tailler qu'un seul bloc.

La figure 1 illustre un déplacement valide du bloc vers la droite, qui montre qu'en partant d'une position aux coordonnées $(0, 0)$, une position finale acceptée possible est $(4, 0)$.

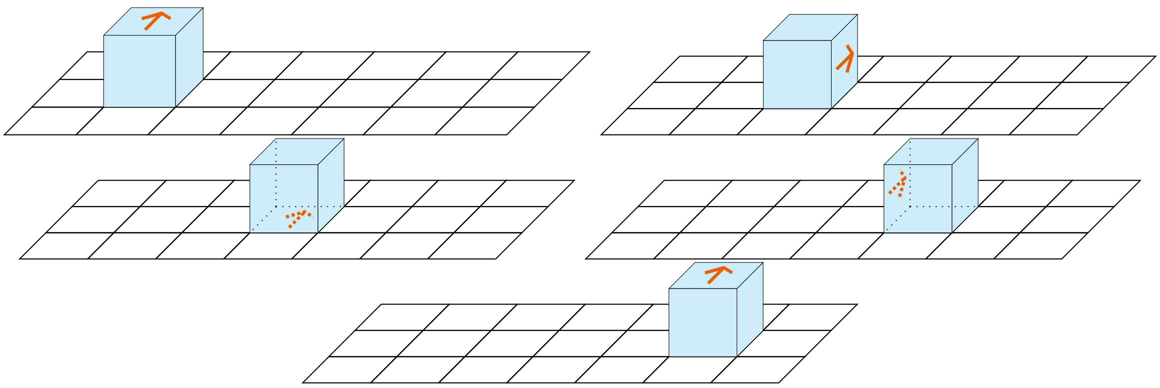

Figure 1 – Illustration d'une suite de basculements du bloc.

1. En partant d'une position de départ donnée, quelles sont les positions finales acceptées possibles pour le bloc ?

2. Reprendre la question précédente si le bloc n'est plus un cube de côté 1 mais un pavé de côtés a, b et c entiers.

Dans les questions suivantes, on pourra dans un premier temps supposer que l'on a affaire à un cube de côté 1 avant de traiter le cas du pavé.

Dans cette question uniquement, les nains ont plusieurs blocs à leur disposition. Les blocs ont des propriétés magnétiques, ce qui permet d'utiliser comme support de basculement non pas le sol mais également d'autres blocs, comme illustré par la figure 2. Après chaque basculement, au moins une face de chaque bloc doit toujours reposer intégralement sur une surface, horizontale ou verticale.

Les positions acceptées par Prof sont celles où les blocs sont tous empilés les uns sur les autres, et chacun porte sur la face supérieure une flèche pointant vers le Nord.

3. En partant d'une position acceptable pour Prof, quelles sont les positions finales acceptées possibles pour les blocs ?

Les nains ne seraient-ils que des pions entre les mains de la Reine ? En tout cas, dans cette question uniquement, les voilà sur un échiquier !

Sur leur bloc, les faces sont colorées, avec au total autant de blanc que de noir. Il n'est possible d'effectuer un basculement que si les cases blanches sont recouvertes par des surfaces blanches, et les noires par des surfaces noires.

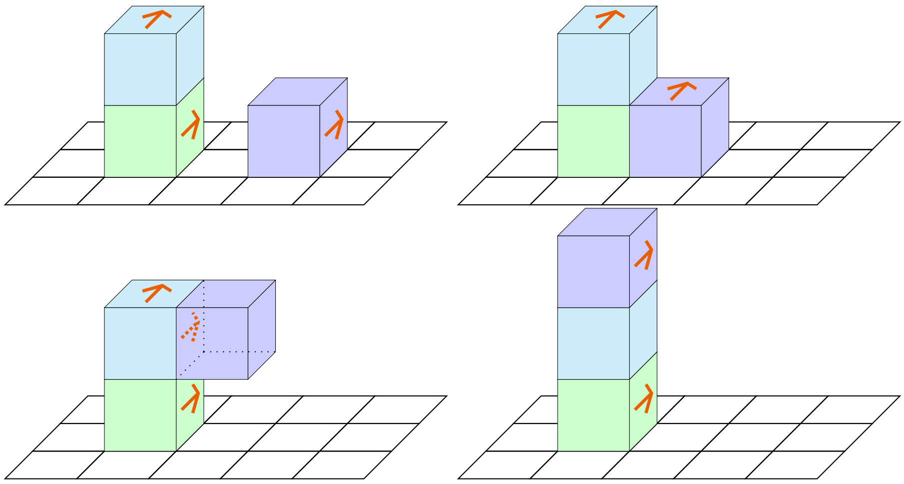

Figure 2 – Exemple d'un cube de côté 1 escaladant une pile de 2 cubes de côté 1.

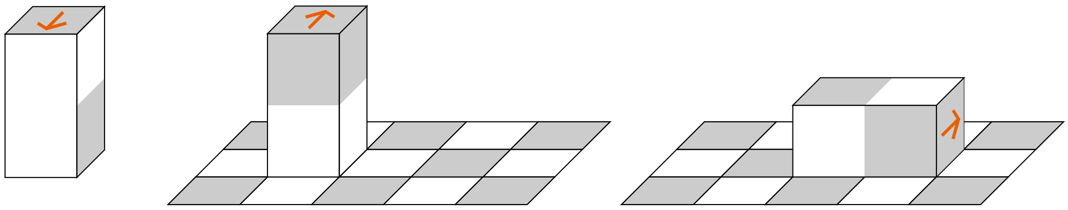

Figure 3 – Exemple de basculement valide d'un pavé coloré $2 \times 1 \times 1$.

Par exemple, dans la figure 3, la face opposée à celle portant la flèche doit être noire, et la face arrière du bloc est donc entièrement blanche (la première figure représente l'arrière du bloc). Après ce premier basculement, la seule possibilité est donc de rebasculer à la position de départ.

4. En partant d'une position de départ donnée, qui respecte la contrainte de couleur, quelles sont les positions finales acceptées possibles pour le bloc ?

Les nains veulent respecter la forêt, et s'imposent de ne pas écraser plus d'une fois la même surface de terre avec leur bloc. Par exemple, les basculements illustrés par la figure 1 sont valides, et écrasent au total une surface 5.

5. En partant d'une position de départ donnée, quelles sont les positions finales acceptées possibles pour le bloc ?

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. La botte de n lieues

Le chat botté cherche à savoir combien de lieues va lui permettre de parcourir sa botte magique.

Le chat commence avec une collection de bottes ensorcelées, chacune numérotée par un chiffre (donc entre 0 et 9), et souhaite terminer avec une unique botte. Pour cela, il procède par *fusions* : il choisit deux bottes de sa collection et multiplie les deux chiffres qu'elles portent pour obtenir un nombre N à un ou deux chiffres. Les deux bottes initiales disparaissent, et une ou deux bottes apparaissent numérotées par les chiffres de N. Lorsqu'enfin il n'a plus qu'une seule botte, c'est le chiffre écrit sur cette dernière qui lui indique le nombre de lieues qu'il pourra parcourir.

Par exemple, si le chat botté commence avec des bottes numérotées $2, 4, 5$ et 8, il peut choisir la suite de fusions suivante :

— fusionner les bottes numérotées par 4 et 8, ce qui donne $N = 32$, pour des bottes numérotées par $2, 2, 3$ et 5 ;

— fusionner les bottes numérotées par 2 et 3, ce qui donne $N = 6$, pour des bottes numérotées par $2, 5$ et 6 ;

— fusionner les bottes numérotées par 2 et 6, ce qui donne $N = 12$, pour des bottes numérotées par $1, 2$ et 5 ;

— fusionner les bottes numérotées par 2 et 5, ce qui donne $N = 10$, pour des bottes numérotées par $0, 1$ et 1 ;

— fusionner les bottes numérotées par 0 et 1, ce qui donne $N = 0$, et enfin les deux dernières bottes, numérotées 0 et 1, pour une unique botte 0.

Il a ainsi obtenu une botte de 0 lieues, dont l'utilité reste à débattre.

1.

a) Le chat commence avec une collection de 4 bottes numérotées $1, 6, 9, 7$. S'arrête-t-il nécessairement en un nombre fini d'étapes, ou peut-il jouer infiniment longtemps ?

b) Reprendre la question précédente, mais avec une collection initiale de bottes quelconque.

On suppose dans la suite qu'initialement aucune botte ne porte le chiffre 0 ou 1, et que le chat a au moins deux bottes.

2.

a) Quels sont les chiffres k tels qu'il existe une collection initiale de bottes permettant au chat de terminer avec une botte de k lieues ?

b) Étant donné une collection initiale de bottes c, on note ℓ_c le nombre de chiffres k tels que le chat peut terminer avec une botte de k lieues. Quelle est la valeur maximale de ℓ_c possible ?

c) On note $\ell_{\max}$ la valeur maximale de ℓ_c. Parmi les collections c pour lesquelles $\ell_c = \ell_{\max}$, quel est le nombre minimal de bottes possibles ?

3.

a) Soit k un entier. Existe-t-il une collection d'au moins 3 bottes telle que le chat obtient toujours une botte de k lieues quelles que soient les fusions qu'il choisit ?

b) Reprendre la question précédente avec au moins 1000 bottes au lieu de 3.

Soit f un entier naturel. Les bottes ont été soumises à un sortilège plus élaboré, ce qui les fait se combiner différemment, par *f-fusion* : au lieu de $N = ab$, c'est $N = ab + f$ dont les chiffres indiquent les bottes obtenues. Par exemple, la fusion précédente est une 0-fusion.

De plus, on autorise de nouveau que les bottes initiales puissent porter le chiffre 0 ou 1.

4. On fixe f un entier naturel.

a) N'importe quelle configuration peut-elle toujours être ramenée par f-fusions à une unique botte ?

b) N'importe quelle configuration peut-elle toujours donner lieu à une infinité de f-fusions, tout en gardant un nombre de bottes borné ?

c) N'importe quelle configuration peut-elle toujours donner lieu à une infinité de f-fusions, en générant une quantité illimitée de bottes ?

On pourra commencer par les cas $f = 1$, $f = 10$, $f = 30$, $f = 100$.

5. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. Miroir, mon beau miroir

La Reine du royaume de Blanche-Neige passe son temps à se contempler dans les miroirs à double face dans son palais. Mais ce qu'elle préfère, c'est lorsqu'elle peut admirer les deux faces d'un même miroir.

Dans la salle des miroirs, munie d'un repère orthonormé, les miroirs sont des segments parallèles à l'un des axes et qui ne se touchent pas. La Reine se place en choisissant un point O du plan qui n'est pas sur un miroir et regarde dans l'une des quatre directions qui fait un angle de 45 degrés avec l'axe des abscisses ou des ordonnées.

Sa ligne de vue est la ligne brisée qui part du point O dans la direction choisie et qui se réfléchit dès qu'elle croise un miroir. L'angle avec lequel la ligne de vue croise un miroir vaut toujours 45 degrés et le rayon est réfléchi en formant un angle de 45 degrés avec le miroir. La Reine, qui a une verrue sur le nez, veut que sa ligne de vue revienne dans son dos sans jamais rencontrer l'extrémité d'un miroir. La Reine *admire* un miroir si sa ligne de vue rencontre ses deux faces.

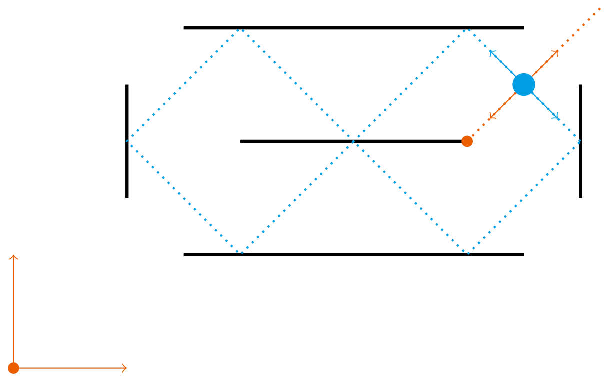

Figure 4 – Illustration d'une disposition de 5 miroirs.

La figure 4 présente une disposition de 5 miroirs parallèles aux axes du repère orthonormé en rouge. Si la Reine se place sur le point bleu, elle ne peut pas regarder dans les directions oranges, car sa ligne de vue ne reviendrait pas sur elle ou croiserait l'extrémité d'un miroir, mais elle peut regarder dans l'une des deux direction bleues. En partant du point bleu, et de l'une des deux directions bleues, la Reine admire uniquement le miroir central.

Dans une disposition à n miroirs où la Reine admire k d'entre eux, la satisfaction de la Reine est le rapport $\frac{k}{n}$.

1. Existe-t-il une disposition où la satisfaction de la Reine est au moins 0,5 ? Au moins 0,99 ?

2. Soit n un entier. Quelle est la satisfaction maximale de la Reine pour une disposition de n miroirs ?

3. Dans la suite du problème, un caprice de la Reine lui impose de n'avoir que des miroirs de longueur 1. Reprendre la question précédente dans ce cas.

Les 7 nains ont prévu de perturber la Reine en tournant certains de ses miroirs de 90° autour de leur centre, comme illustré par la figure 5.

La Reine, au courant de leur plan, décide de les piéger : parmi ses n miroirs, elle en choisit $n - j$ qu'elle bloque pour empêcher que les nains les tourne, et se place en un point O dans une certaine direction.

Les nains arrivent, essaient de tourner l'un des miroirs laissés libres, puis un autre, etc. Mais ils se rendent vite à l'évidence : la Reine à réussi à s'assurer d'une part qu'aucune collision entre miroirs n'aura jamais lieu, et d'autre part qu'entre chaque rotation des miroirs sa ligne de vue reviendra sur elle-même et lui permettra d'admirer chacun des j miroirs.

Dans ce cas, cette configuration est dite formidable pour la Reine, et son bonheur est de $\frac{j}{n}$.

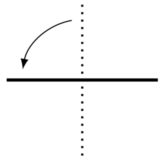

FIGURE 5 – Illustration d'une rotation d'un miroir.

4. La Reine peut placer le nombre n de miroirs de son choix. Peut-elle s'assurer un bonheur non nul ? Au moins 0,5 ? En fonction de $x \in [0,1]$, peut-elle s'assurer un bonheur d'au moins x ?

Lassée des plats miroirs, la Reine a commandé des miroirs carrés de côté 1, qu'elle dispose pour que leurs côtés soient parallèles aux axes, toujours sans contact entre les miroirs. La Reine, de plus en plus exigeante, n'admire un miroir que si sa ligne de vue en touche les 4 côtés.

Par exemple dans la figure 6, la Reine peut se placer au point bleu et regarder dans les directions bleues, mais pas dans les directions orange. La Reine ne peut pas non plus se placer au point orange, car il est à l'intérieur d'un miroir. Néanmoins, elle n'admire aucun miroir, et a donc une satisfaction de 0.

5. Reprendre les questions 1 et 2 dans ce cas.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

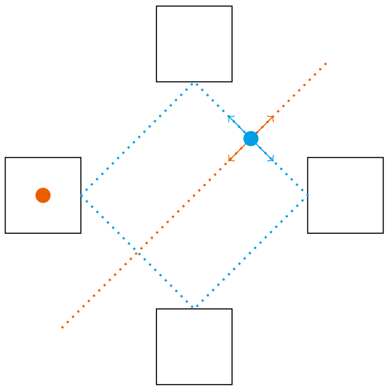

FIGURE 6 – Illustration d'une configuration avec 4 miroirs carrés.

* * *