Problèmes de la 1ère édition des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s

VERSION 1.3 MISE À JOUR LE 14 NOVEMBRE 2018

Préambule

Ces problèmes sont proposés dans le cadre des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s, organisées par l'association Animath. Ils sont proposés par des chercheur·e·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Chaque équipe choisit de traiter un des quatre problèmes. On se reportera au site internet pour plus de détails.

Table des matières

1. Intersections de guirlandes

Étienne décore son balcon pour les fêtes de fin d'année. Il dispose pour cela de n guirlandes, où n est un entier positif. Son balcon est constitué de n points d'attache en bas, notés $A_1, A_2, \ldots, A_n$, et de n points d'attache en haut, notés $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Dans le plan, les points sont représentés par $A_i = (i, 0)$ et $B_i = (i, 1)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Une *configuration* du balcon est une disposition des guirlandes de sorte que chaque guirlande soit un segment reliant un point d'attache haut et un point d'attache bas, et que chaque point d'attache soit l'extrémité d'une et une seule guirlande.

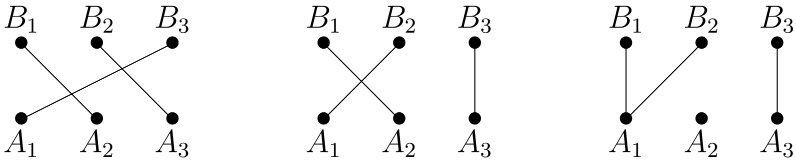

Figure 1. Exemples pour $n = 3$ guirlandes.

Sur la figure 1, le dessin de gauche et celui du centre représentent des configurations possibles du balcon d'Étienne. En revanche le dessin de droite ne satisfait pas la définition d'une configuration car aucune guirlande n'est reliée au point A_2.

1. Pour un entier n fixé, combien existe-t-il de configurations différentes avec n guirlandes ?

2. Sur les deux configurations de la figure 1, on voit que pour $n = 3$, les guirlandes peuvent se croiser en des points d'ordonnée égale à $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ ou $\frac{2}{3}$. Pour un entier n fixé, quelles sont les différentes ordonnées possibles pour les points d'intersection entre deux guirlandes ?

3. En fonction du nombre de guirlandes n, combien existe-t-il de configurations du balcon telles que tous les points d'intersection des guirlandes aient une ordonnée égale à $\frac{1}{2}$? Combien existe-t-il de configurations du balcon telles que tous les points d'intersection des guirlandes aient une ordonnée égale à $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$? On pourra chercher une description explicite des configurations correspondantes.

4. Combien existe-t-il de configurations telles que tous les points d'intersection des guirlandes aient une ordonnée supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$?

5. Pour n fixé, quel est le nombre maximal de points d'intersection distincts d'une configuration ? Quel est le nombre maximal d'ordonnées distinctes pour les points d'intersection d'une configuration ? On pourra chercher à encadrer ces quantités aussi précisément que possible.

* * *

2. Une drôle de machine

Coralie a reçu une étrange machine pour Noël. La machine est composée d'un écran qui affiche k chiffres et de deux boutons, "A" et "B". Les k chiffres affichés à l'écran donnent l'*état* de la machine.

En appuyant sur les boutons, Coralie peut effectuer les deux opérations suivantes :

(A) Changer l'ordre des k chiffres comme elle le désire.

(B) Si le nombre affiché à l'écran est n, obtenir les k derniers chiffres du nombre $11 \times n$.

Par exemple, si 203 est l'état initial de la machine, Coralie peut le transformer en 023, 032, 203, 320 ou 230 en appuyant sur le bouton "A", ou bien obtenir 322 en appuyant sur le bouton "B" (car $11 \times 302 = 3322$).

Coralie a le droit d'utiliser d'appuyer sur les boutons "A" et "B" autant de fois qu'elle le souhaite.

1. Est-il possible pour Coralie de faire passer la machine :

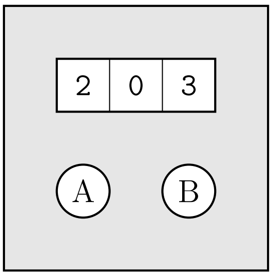

Figure 2. La machine de Coralie dans l'état 203, avec $k = 3$.

a) de l'état 18 à l'état 01 (pour $k = 2$) ?
b) de l'état 26 à l'état 01 (pour $k = 2$) ?
c) de l'état 2018 à l'état 0001 (pour $k = 4$) ?
d) de l'état 2048 à l'état 0001 (pour $k = 4$) ?

2. Pour $k = 2$, quelles sont les états qui peuvent être transformés en 01 ? Même question pour $k = 3$, quels sont les états qui peuvent être transformés en 001. Et pour un entier k quelconque, en 0 . . . 01 ?

3. Parmi les états de k chiffres qui ne s'écrivent qu'avec des 0 et des 1, lesquelles peuvent être obtenus en partant de l'état $0 \cdots 01$?

4. Quels sont les états de k chiffres qui peuvent être obtenues en partant de $0 \cdots 01$? Un état qui vérifie cette propriété est appelé un état *accessible*.

5. On définit la *complexité* d'un état accessible de k chiffres comme le nombre minimal de fois où il faut appuyer sur le bouton (A) pour arriver à cet état en partant de 0 . . . 01. Quels sont les états accessibles de k chiffres qui ont une complexité maximale ? Estimer cette complexité.

* * *

3. La chasse aux cadeaux

Le père Noël doit livrer ses cadeaux. Il a plus de cadeaux que d'enfants et doit décider comment les répartir. Diego, qui effectue son stage auprès du père Noël, lui propose de l'aider en organisant une chasse aux cadeaux. Le jeu se déroule de la manière suivante :

— Diego dispose les cadeaux dans le jardin.
— Chacun des enfants choisit un cadeau et se place devant.
— Diego donne le signal de départ. Chaque enfant prend le cadeau qui est devant lui.
— Ensuite, toutes les minutes, chaque enfant repère les cadeaux les plus proches de lui :
  — s'il trouve un cadeau strictement plus proche de lui que tous les autres cadeaux, il se déplace vers ce cadeau et le prend ;
  — sinon (si plusieurs cadeaux sont à égale distance de sa position), il reste sur place et attend la minute suivante.
— Si plusieurs enfants arrivent en même temps sur le même cadeau, ils le partagent et doivent rester ensemble jusqu'à la fin de la chasse.
— La chasse continue jusqu'à ce que tous les cadeaux aient été trouvés.

Dans l'exemple ci-dessous, Diego doit répartir 8 cadeaux entre 3 enfants (notés E_1, E_2 et E_3). Il décide de disposer les cadeaux aux points $C_1, \ldots, C_8$ de la figure.

— Au départ ($t = 0$), les enfants choisissent chacun un des cadeaux de la ligne du bas : E_1 va en C_1, E_2 va en C_2 et E_3 va en C_3.

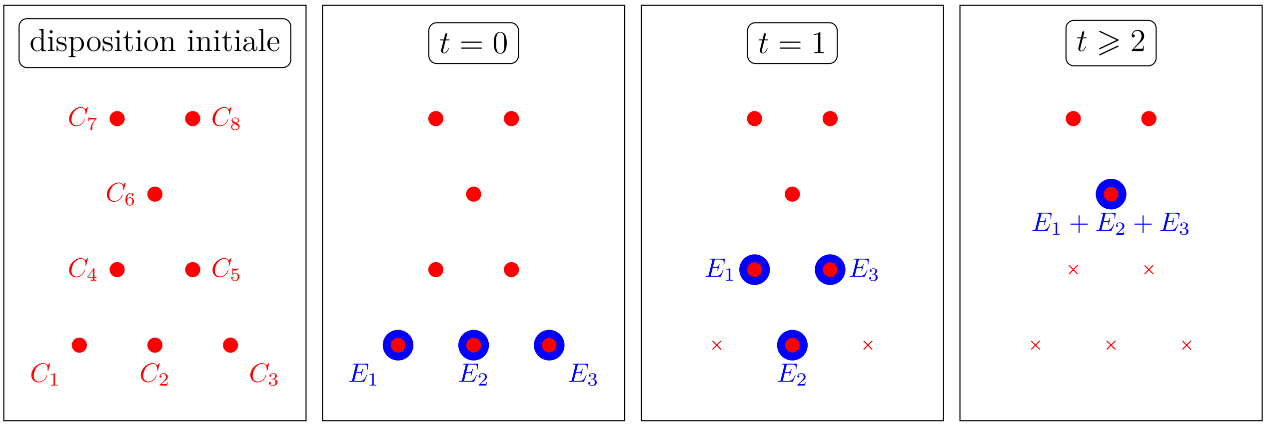

Figure 3. Exemple avec 8 cadeaux et 3 enfants.

— Au bout d'une minute ($t = 1$), E_1 se déplace vers le cadeau C_4 et E_3 se déplace vers le cadeau C_5. Pendant ce temps, E_2 reste en C_2 car les cadeaux C_4 et C_5 sont à égale distance de E_2.

— Au bout de deux minutes, les trois enfants se dirigent vers le point C_6 qui est le plus proche pour les trois.

— Ils ne bougeront alors plus jamais du point C_6 car ils sont à égale distance des deux cadeaux restants en C_7 et C_8.

On considère que les enfants gagnent si, au bout d'un certain temps, tous les cadeaux ont été trouvés.

1. Combien d'enfants au minimum faut-il pour qu'ils puissent gagner, dans les cas suivants.

a) Avec trois cadeaux disposés en triangle équilatéral ?

b) Avec quatre cadeaux disposés en carré ?

c) Avec n cadeaux disposés en n-gone régulier ?

d) Avec sept cadeaux disposés en hexagone avec un cadeau au centre (voir figure 4) ?

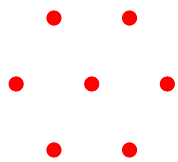

Figure 4. Hexagone avec centre.

Dans cette question (et uniquement dans cette question), les enfants ont décidé de tricher. Ils essaient de se concerter pour établir une stratégie de groupe et ils peuvent parfois décider d'attendre en restant à leur place au lieu d'aller chercher le cadeau le plus proche (alors que c'est normalement obligatoire).

2. Existe-t-il un entier k et une disposition initiale avec n cadeaux tels que k enfants puissent gagner s'ils trichent, mais pas s'ils ne trichent pas ?

3. On revient dans le cas où les enfants ne peuvent pas tricher. Pour un nombre d'enfants k fixé, existe-t-il une disposition initiale de cadeaux telle que k enfants ne puissent jamais gagner, quelle que soit la position initiale des enfants ?

4. Diego veut répartir $\frac{b(b+1)}{2}$ cadeaux, qu'il positionne en réseau triangulaire comme sur la figure 5. Combien d'enfants faut-il au minimum pour gagner avec cette disposition initiale ? Commencer par traiter les petites valeur de b.

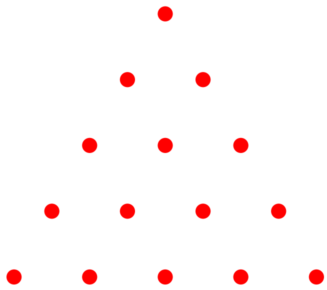

FIGURE 5. Réseau triangulaire avec 15 cadeaux ($b = 5$).

5. On cherche une constante C telle que, quel que soit le nombre d'enfants k, il existe une configuration avec $n > Ck$ cadeaux telle que k enfants ne puissent prendre qu'au plus Ck cadeaux. Un tel C existe-t-il ? Si oui, quelle est la plus petite valeur de C que vous pouvez trouver ?

* * *

4. À LA PATINOIRE

Cet hiver, Louise a décidé de se rendre dans une patinoire très spéciale : il s'agit d'un plan (infini) qui est divisé en différentes zones par des droites. Pour éviter les collisions, on a attribué à chaque zone une couleur (bleu ou orange) et il a été décidé que dans une zone bleue, il faut obligatoirement patiner dans la direction nord-sud, et dans une zone orange, il faut obligatoirement patiner dans la direction est-ouest.

1. On note n le nombre de zones. De combien de manières est-il possible de colorier la patinoire ? Et si l'on souhaite que deux zones adjacentes ne soient jamais de la même couleur ?

Désormais, pour des raisons esthétiques, on suppose que deux zones adjacentes ne sont jamais de la même couleur. On suppose de plus que les droites qui délimitent les zones ne sont jamais parallèles à l'axe nord-sud ou l'axe est-ouest.

Louise choisit un point de départ et commence à patiner dans l'un des deux seuls sens autorisés. À chaque fois qu'elle croise une droite, elle change de zone et tourne donc d'un quart de tour afin de poursuivre sa trajectoire dans la nouvelle zone. Si elle croise l'intersection de plusieurs droites, elle tombe et son parcours s'arrête.

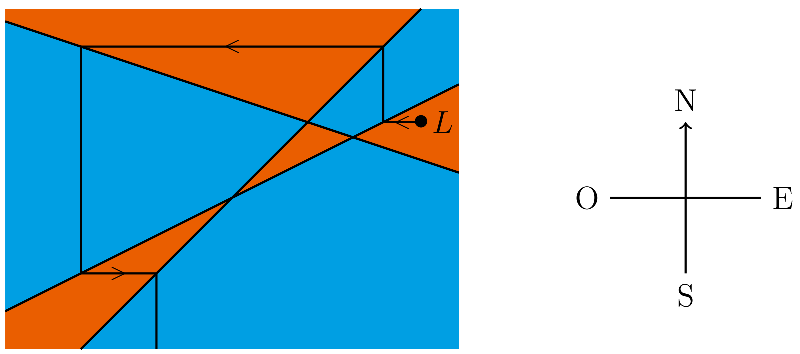

FIGURE 6. Exemple de patinoire avec $p = 3$ et $n = 7$.

Sur l'exemple de la figure 6, Louise commence sur le point L et décide de partir vers l'ouest. Après cinq virages, elle finit par aller indéfiniment vers le sud.

2. Pour cette question, on étudie les patinoires où il n'y a que deux droites qui séparent les différentes zones. Quelles sont les trajectoires possibles pour Louise ?

3. Louise souhaite passer par toutes les zones, sans jamais tomber. Soit p le nombre de droites, trouver différentes configurations avec p droites telles que c'est possible. Commencer par considérer les cas $p = 3$ et $p = 4$. En particulier, est-ce possible sans avoir de droites parallèles ?

4. Si Louise est partie d'un point L dans un sens (par exemple vers l'ouest), est-il possible qu'elle repasse plus tard dans la même zone que le point L, mais dans l'autre sens (*i.e.* vers l'est) ?

5. On dit que la trajectoire est bornée si la distance entre Louise et le point de départ est bornée. Par exemple, dans la figure 6, la trajectoire est non-bornée, car Louise peut aller infiniment loin du point de départ. Est-il possible que Louise suive :

a) une trajectoire non-bornée mais changeant une infinité de fois de zone ?

b) une trajectoire non-bornée mais passant une infinité de fois par une même zone bornée ?

c) une trajectoire bornée, où elle ne tombe pas, mais ni convergente (qui ne se rapproche pas infiniment d'un point) ni périodique (qui ne se répète pas) ?

* * *