Problèmes de la 2ème édition des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s

VERSION 2 MISE À JOUR LE 25 OCTOBRE 2019

Préambule

Ces problèmes sont proposés dans le cadre des Correspondances des Jeunes Mathématicien·ne·s, organisées par l'association Animath. Ils sont proposés par des chercheur·e·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Chaque équipe choisit de traiter un des quatre problèmes. On se reportera au site internet pour plus de détails.

 En cas de questions concernant les Correspondances, consulter le site `www.correspondances-maths.fr` ou contacter les organisateur·rice·s à l'adresse `contact@correspondances-maths.fr`.

Table des matières

1. MISES GAGNANTES

Une fête est organisée au village. Yohann et Pauline s'y rencontrent pour jouer à leur jeu favori. Yohann possède initialement n billes dans son sac et mise successivement c fois entre 0 billes et toutes les billes de son sac.

Pauline possède $c = g + p$ cartes :

— g cartes portant la mention "GAGNÉ" ;

— p cartes portant la mention "PERDU".

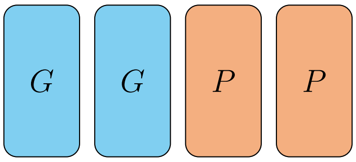

FIGURE 1. Illustration des $c = 4$ cartes de Pauline pour $g = p = 2$.

Après chacune des mises de Yohann, Pauline choisit une de ses cartes ;

— si Pauline choisit une carte "GAGNÉ", alors Yohann gagne le nombre de billes misées, qui sont ajoutées à son sac ;

— si Pauline choisit une carte "PERDU", alors Yohann perd le nombre de billes misées de son sac.

La carte est ensuite défaussée. Le jeu s'arrête après que Pauline a joué ses c cartes, ou si Yohann n'a plus de billes.

Par exemple, si Yohann a 10 billes, $c = 4$ et $g = p = 2$ voici un exemple de partie :

— Yohann chosit de miser 2 billes. Pauline choisit alors de lui donner une carte "PERDU" et il reste 8 billes à Yohann.

— Yohann chosit de miser 2 billes. Pauline choisit alors de lui donner une carte "GAGNÉ" et il reste 10 billes à Yohann.

— Yohann chosit de miser 1 bille. Pauline choisit alors de lui donner une carte "GAGNÉ" et il reste 11 billes à Yohann.

— Yohann chosit de miser 0 billes. Pauline doit lui donner sa dernière carte "PERDU". Yohann finit la partie avec 11 billes.

L'objectif est de trouver une stratégie pour maximiser le gain de Yohann, c'est-à-dire le plus grand nombre de billes qu'il peut gagner à coup sûr quelle que soit la manière de jouer de Pauline.

Par exemple pour $g = p = 1$ et $n = 1$, Pauline peut jouer sa carte "PERDU" dès que Yohann mise sa bille donc le gain maximum de Yohann est au plus de 1. Réciproquement Yohann peut ne jamais miser de billes, et par conséquent son gain maximal est au moins de 1. Ainsi son gain maximal est exactement de 1.

1. On suppose $g = p = 2$ (donc $c = 4$) et $n = 11$. Quelle est la stratégie optimale pour Yohann ? Quel est le gain associé ? Et si n vaut une autre valeur quelconque ?

2. Quelle est la stratégie optimale pour Yohann et le gain associé lorsque :

a) $g = 0$, p et n sont quelconques ?

b) $p = 0$, g et n sont quelconques ?

c) $g = 1$, p et n sont quelconques ?

3. Reprendre la question dans le cas général où g, p et n sont quelconques.

Pauline a maintenant à sa disposition un nouveau type de cartes, les cartes vierges. Si Pauline choisit une carte vierge, Yohann ne perd ni ne gagne aucune billes.

4. Pauline a autant de cartes qu'elle le souhaite de chaque type, mais elle a un quota $q \in [0, n]$ à respecter :chaque carte "PERDU" comptera pour 0, chaque carte vierge pour 1 et chaque carte "GAGNÉ" pour 2, et le total sur les c cartes doit à la fin atteindre q. Quel est maintenant le meilleur gain que peut garantir Yohann ?

5. Reprendre la question lorsque $q \in [n+1, 2n]$.

* * *

2. Cible en vue !

À la fête du village, Mai-Linh s'amuse à son stand favori : le stand de tir de fléchettes. Elle joue aux fléchettes sur une cible circulaire divisée en 3 secteurs numérotés 1, 10 et 100. Elle dispose de fléchettes qui sont marquées par un chiffre entre 1 et 9.

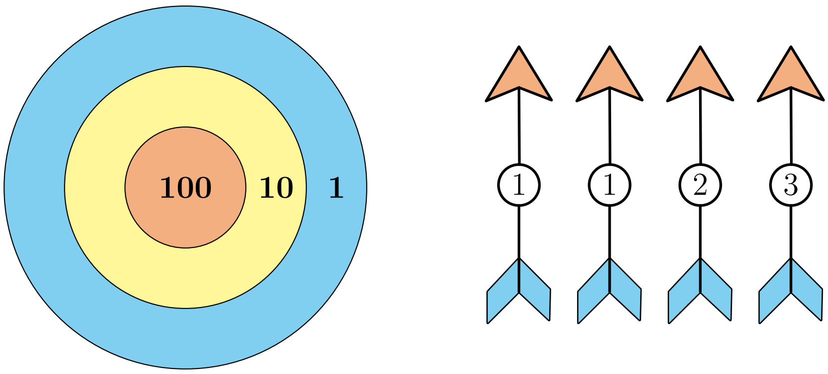

Figure 2. La cible de Mai-Linh, et 4 fléchettes marquées des chiffres 1, 1, 2 et 3.

Lorsque Mai-Linh lance une fléchette dans un secteur, pour obtenir le score du lancer, on effectue le produit entre le nombre marqué sur la fléchette et la valeur sur le secteur. Mai-Linh n'est pas obligée de lancer toutes les flèches dont elle dispose.

Par exemple, si la fléchette marquée 2 touche le secteur 10 alors on obtient un score de lancer de 20. Le score est obtenu en additionnant tous les scores des lancers. Par exemple, si la fléchette 2 touche le secteur 10, que la fléchette 3 touche le secteur 1 et que les deux fléchettes 1 ne sont pas lancées, le score est de 23.

Tout d'abord, Mai-Linh joue avec des fléchettes marquées par le chiffre 1.

1. Quel est le plus petit score S que Mai-Linh ne peut pas obtenir avec n fléchettes marquées avec le chiffre 1 ? On commencera par étudier le cas où n est plus petit que 10, et le cas où $n = 1000$.

2. Quel est le nombre N de scores différents que Mai-Linh peut obtenir avec n fléchettes marquées par le chiffre 1 ? On commencera par étudier le cas où n est plus petit que 10 et le cas où $n = 1000$.

Soit n un entier. À présent, Mai-Linh choisit n fléchettes marquées avec les chiffres $a_1, \cdots, a_n$. On note $S(a_1, \cdots, a_n)$ le plus petit score qu'elle ne peut pas obtenir avec ces n fléchettes, et $N(a_1, \cdots, a_n)$ le nombre de scores qu'elle peut obtenir.

3. Mai-Linh chosit les chiffres de ses fléchettes parmi les deux chiffres autorisés : 1 et 2. Quelle est, en fonction de n, la plus grande valeur de $S(a_1, \cdots, a_n)$ possible, et pour quelles fléchettes ce maximum est-il atteint ?

À présent, Mai-Linh choisit librement ses n chiffres parmi $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. On commencera par étudier les cas $n = 1, 2, 3, 4, 5$, et le cas $n = 1000$.

4. Quelle est la plus petite valeur possible pour $N(a_1, \cdots, a_n)$ lorsque n est fixé ? Pour quelles fléchettes ce minimum est-il atteint ?

5. Quelle est la plus grande valeur possible pour $S(a_1, \cdots, a_n)$ et $N(a_1, \cdots, a_n)$? Pour quelles fléchettes ce maximum est il atteint ? Cherchez à encadrer aussi précisément que possible cette valeur maximale, en fonction de n.

* * *

3. Cache-cache dans le village

Pendant la fête, les enfants profitent que leurs parents sont occupés pour organiser un cache-cache géant dans les rues. Le plan du village est représenté par des rues reliant différents croisements. Tom, que tous les autres cherchent, ne peut se cacher qu'à des croisements, et le seul moyen de le trouver est d'être au même endroit que lui. Néanmoins, pour rendre le jeu plus intéressant, il est autorisé à se déplacer.

Plus précisément :

— Tout d'abord, les poursuiveurs se placent chacun sur le croisement de leur choix.

— Ensuite, Tom se place sur le croisement de son choix.

— A chaque minute paire, chaque poursuiveur peut rester sur place ou se déplacer sur un croisement adjacent. Si Tom s'y trouve, les poursuiveurs ont gagné.

— A chaque minute impaire, Tom peut rester sur place ou se déplacer sur un croisement adjacent. Il est interdit de se déplacer sur un croisement où un poursuiveur se trouve (on considère que Tom sait exactement où sont ses poursuiveurs, car ils font beaucoup de bruit). Tom gagne s'il peut ainsi éviter de se faire trouver autant de temps qu'il le souhaite.

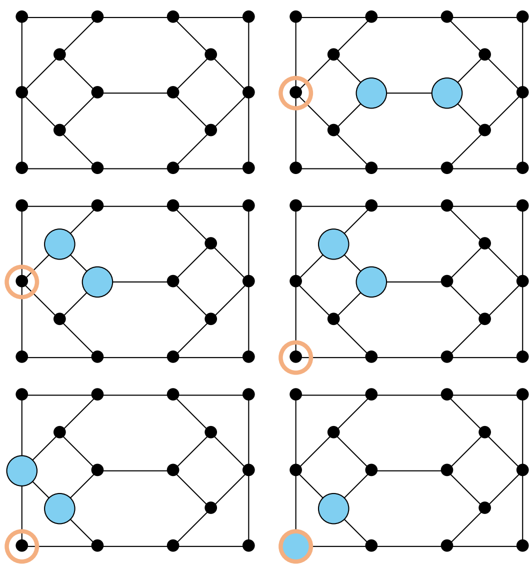

Figure 3. Un exemple de partie de cache-cache.

La figure 3 illustre une partie où les poursuiveurs gagnent. En haut à gauche : plan du village. En haut à droite : les deux poursuiveurs (disques bleus) et Tom (cercle orange) se sont placés. Au milieu à gauche : à la minute 0, les poursuiveurs se déplacent. Au milieu à droite : à la minute 1, Tom se déplace. En bas à gauche : à la minute 2, les poursuiveurs se déplacent. A la minute 3, Tom décide de ne pas se déplacer, et les poursuiveurs gagnent à la minute 4 comme illustré en bas à droite.

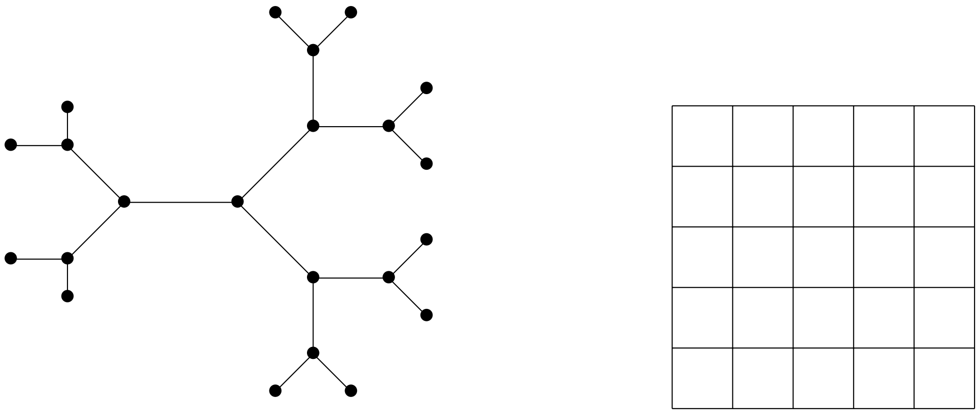

Figure 4. Un premier plan possible pour le village, et un autre plan possible du village : une grille de côté 5, et par conséquent 36 croisements.

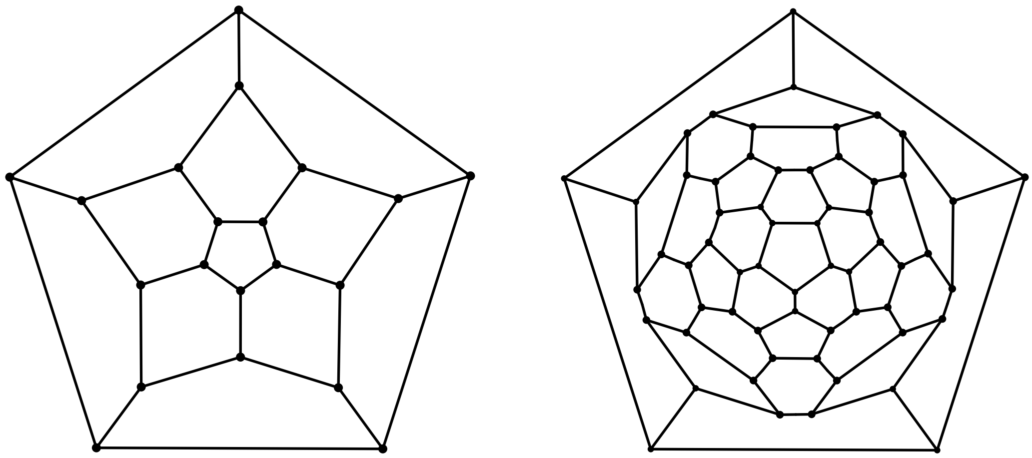

Figure 5. Deux autres plans possibles, en forme de dodécaèdre à gauche et de ballon de football à droite.

Dans un premier temps, on suppose que les poursuiveurs connaissent à tout instant la position de Tom. On se demande à partir de quel nombre de poursuiveurs Tom finit forcément par être trouvé.

1. Le village a la forme donnée par la figure 4, à gauche. Quel est le nombre minimal de poursuiveurs nécessaire ? Avec un tel nombre de poursuiveurs, s'ils jouent aussi bien que possible, à la fin de quelle minute finiront-ils nécessairement par trouver Tom ?

2. Quel est le nombre minimal de poursuiveurs nécessaire pour des villages avec les formes suivantes :

a) une grille carrée de côté n (voir figure 4, à droite) ?

b) les arêtes d'un dodécaèdre (voir figure 5, à gauche) ?

c) les arêtes d'un ballon de football (voir figure 5, à droite) ?

3. Soit k un entier fixé. Existe-t-il un village tel que k enfants poursuiveurs sont nécessaires pour retrouver l'enfant caché ? Au besoin, le village pourra avoir des ponts, de sorte que des arêtes peuvent se traverser sans former de croisement.

Tom, qui vient juste de se souvenir que le principe du cache-cache est d'être discret, parvient maintenant à se rendre invisible pour ses amis. Le seul moyen de le trouver est d'être sur le même croisement que lui.

4. Pour le village de la figure 4 à gauche, quel est maintenant le nombre minimal de poursuiveurs pour pouvoir le trouver à coup sûr quels que soient ces déplacements et sa position initiale ?

5. Reprendre la question 2 dans le cas où Tom est invisible.

* * *

4. Pliages en papier

Antoine adore les origamis. Il a préparé des pliages pour décorer le village. Il dispose d'une feuille de papier carrée, de côté 1, qu'il va plier pour faire de nouvelles formes. Cependant, Antoine ne plie pas les feuilles n'importe comment : à chaque fois qu'il choisit un axe selon lequel il fait un pli, il veut que le papier replié ne *dépasse* pas de la partie qu'il ne replie pas. Il ne peut replier le papier que vers l'intérieur, et ne peut pas retourner la feuille. Antoine souhaite obtenir de nouvelles formes à partir de son carré. Il va effectuer des plis successifs, en ne *dépassant* jamais.

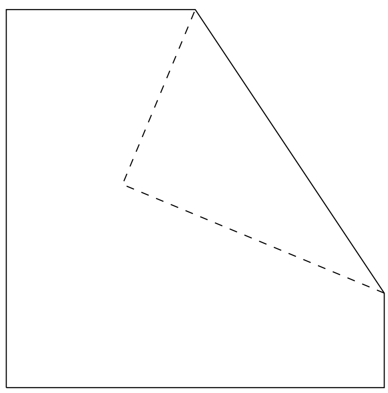

Figure 6. Un premier pli autorisé

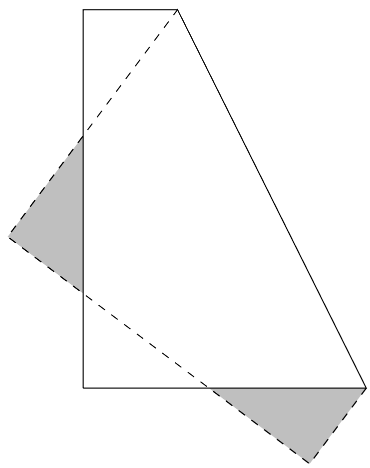

Figure 7. Un pli interdit, les zones en gris *dépassent*

1. Antoine peut-il obtenir les formes suivantes en partant d'un carré, par pliages successifs :

a) Un carré plus petit ;

b) Un triangle équilatéral ;

c) Un polygone régulier à n côtés, où n est un entier naturel plus grand que 5 ;

d) Un polygone quelconque fixé à l'avance, éventuellement dans une version plus petite (si ce n'est pas toujours possible, donner des conditions nécessaires et suffisantes sur un tel polygone pour qu'Antoine puisse l'obtenir).

2. Quel est le triangle équilatéral de plus grande aire que Antoine puisse obtenir en partant d'un carré ?

On suppose maintenant que la feuille de papier d'Antoine a une face bleue sur le recto (qui est face à lui avant le début des pliages), et une face orange sur le verso. Antoine s'intéresse à la couleur, en plus de la forme qu'il peut obtenir.

3. Après pliages, Antoine voit un polygone entièrement orange.

a) Quel est l'aire maximale que le polygone obtenu par Antoine peut avoir ?

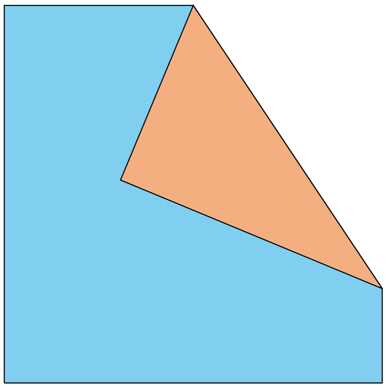

Figure 8. Couleur après un pliage

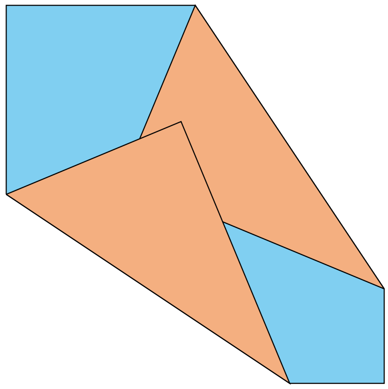

Figure 9. Couleur après un deuxième pliage

b) Si on suppose que l'aire de ce polygone est maximale, quelles sont toutes les formes possibles pour ce polygone ?

4. Quel est l'aire du plus grand triangle équilatéral monochrome qu'Antoine peut obtenir ?

5. Déterminer, ou donner un encadrement, de la plus grande aire d'un polygone monochrome régulier à n côtés, où n est un entier plus grand que 5, qu'Antoine puisse obtenir.

* * *