

Problème pour les Correspondances de Jeunes Mathématicien·ne·s

Sauts de grenouilles

Dans un étang, on retrouve n nénuphars répartis en ligne droite et n grenouilles. Chaque nénuphar comporte une fleur qui peut être ouverte ou fermée. Lorsqu'une grenouille saute sur un nénuphar, elle change l'état de sa fleur : elle ouvre la fleur si celle-ci est fermée, et la ferme sinon. La première grenouille saute sur les nénuphars de 1 en 1, la deuxième de 2 en 2, et ainsi de suite la k -ème de k en k , en partant du bord de l'étang. Au début, toutes les fleurs sont fermées.

1. Pour $n = 6$, préciser l'état de chaque fleur, après le passage de 6 grenouilles. Faire de même pour $n = 10$.
2. Pour $n = 12$, $n = 1000$, $n = 10^7$, ou $n = 10^{12}$ combien de fleurs sont ouvertes après le passage de la troisième grenouille ? Et pour un entier n quelconque ?
3. Quel est l'état de la fleur n après le passage d'exactly n grenouilles ?
4. Si n est un nombre premier, quel est l'état de la fleur n après le passage d'exactly k grenouilles (où $k < n$)? Qu'est-ce que cela change si $k \geq n$?
5. Pour n et k quelconques, quel est l'état de la fleur n après le passage d'exactly k grenouilles